Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

Guía de Aprendizaje Nº 3

NÚMEROS Y LETRAS: LA CLAVE PARA RESOLVER PROBLEMAS COTIDIANOS

Educación Matemática

Primer nivel o ciclo de Educación Media

Educación para Personas Jóvenes y Adultas

Guía de Aprendizaje Nº 3

NÚMEROS Y LETRAS: LA CLAVE PARA RESOLVER PROBLEMAS COTIDIANOS

Educación Matemática

Primer nivel o ciclo de Educación Media

Educación para Personas Jóvenes y Adultas

Avda. Bernardo O'Higgins 1371, Santiago de Chile

Guía de Aprendizaje N°3

NÚMEROS Y LETRAS: LA CLAVE PARA RESOLVER PROBLEMAS COTIDIANOS
Primer nivel o ciclo de Educación Media
Educación para Personas Jóvenes y Adultas

Primera edición, año 2013
Inscripción Nº 224.263

Autores:
Mauricio Huircan Cabrera
Katherina Carmona Valdés

Colaboradores:
Nicolás de Rosas Cisterna, Rosita Garrido Labbé,
María Angélica Contreras Fernando, Pablo Canales Arenas y Carolina Marambio Cárcamo.
Walter Roberto Valdivieso Sepúlveda, Manuel Ernesto Urzúa Bouffanais.

Edición:
Jose Luis Moncada Campos

Revisión editorial matemática:
Carla Falcón Simonelli

Coordinación Nacional de Normalización de Estudios
División de Educación General

Impreso por:
RR Donnelley

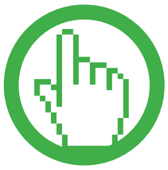
Año 2013
impresión de 99.000 ejemplares

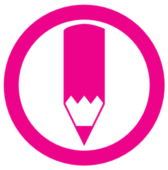
Iconografía


Información


Atención


Tips


Página Web


Actividad


Atividad en el cuaderno


Evaluación

Presentación

El material que la Coordinación Nacional de Normalización de Estudios para la Educación de Personas Jóvenes y Adultas del Ministerio de Educación (Mineduc) pone a su disposición, entrega herramientas de matemática, como la comprensión del lenguaje algebraico, para resolver problemas o situaciones de la vida cotidiana, tanto en el ámbito laboral como en lo social.

Las letras, tal como son usadas en este tipo de lenguaje, permiten generalizar situaciones y facilitar así la comprensión, la resolución de problemas y situaciones contextualizadas o propias de las matemáticas.

El manejo del lenguaje matemático tiene su base en el álgebra, la que está definida por la Real Academia Española (RAE) de la siguiente forma:

Álgebra: Parte de las matemáticas en la cual las operaciones aritméticas son generalizadas empleando números, letras y signos. Cada letra o signo representa simbólicamente un número u otra entidad matemática. Cuando alguno de los signos representa un valor desconocido se llama incógnita.

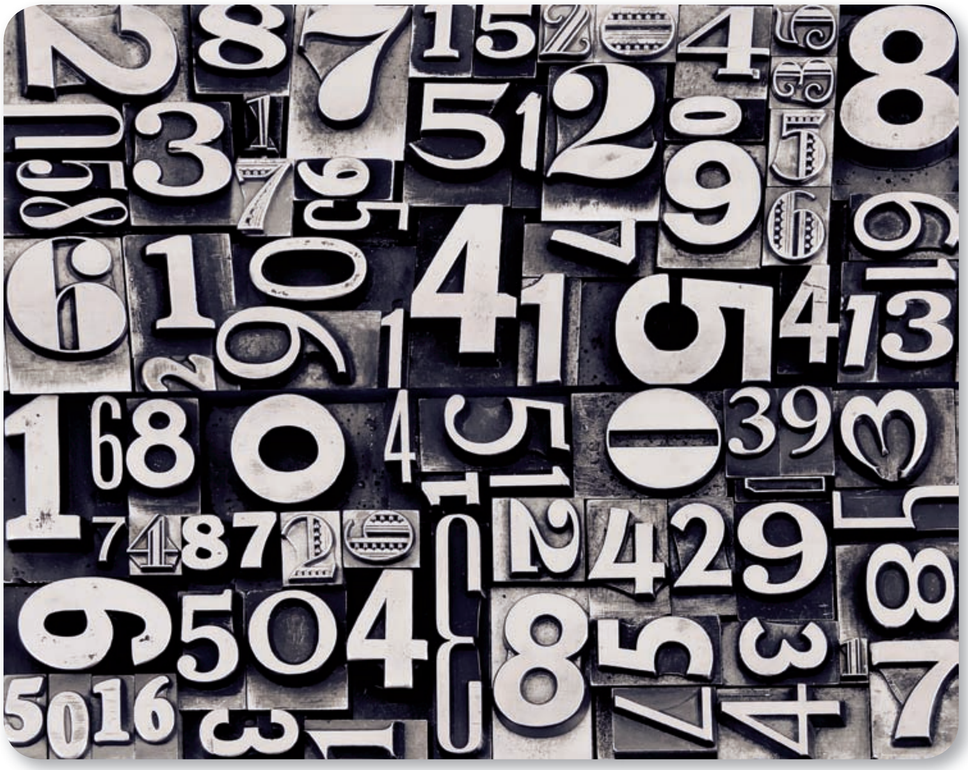
A diferencia de la aritmética, donde utilizábamos solo valores numéricos, en álgebra recurriremos a expresiones que además de números están formadas por factores literales (letras). Comprender y manejar el lenguaje algebraico es una estrategia útil para expresar con precisión relaciones que involucran valores desconocidos.

En esta guía se abordan además de conceptos algebraicos, ecuaciones y sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, que nos permiten modelar situaciones donde se expresa una igualdad y resolver problemas en los que sea necesario calcular, sobre la base de datos conocidos, algún valor importante.

Le invitamos a trabajar en esta guía para aprender estas estrategias, hacerlas parte de su vida y así tener una herramienta más para comprender el mundo.

Guía de trabajo Nº 1

Introducción al lenguaje algebraico



Contenidos

- Significado y uso de las letras en el lenguaje algebraico.
- Reducción de términos semejantes.
- Producto de expresiones algebraicas simples obtenidas por aplicación de la propiedad distributiva.
- Utilización de un lenguaje algebraico básico que permita establecer relaciones entre variables, verificar propiedades numéricas y representar situaciones de la vida cotidiana.
- Productos notables.

VALORACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Valorizar un término algebraico o una expresión algebraica consiste en reemplazar las letras del término o expresión por sus respectivos valores numéricos.

Ejemplo:

Si $a = -2$ y $b = 4$, el valor de la expresión $\dfrac{a+b}{a}$ es:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{-2+4}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

ACTIVIDAD **Resuelva los siguientes ejercicios:**

1) Si $a = -1$, $b = 2$ y $c = 3$, determine el valor de las siguientes expresiones:

a) $a\,b$

b) $a^2 - b^2$

c) $a^3 - b^2$

d) $\dfrac{a}{b} + b\,c$

e) $2a - 3b + c$

f) $\dfrac{c}{a} + b^2$

2) Si $a = 2$, $b = 4$, $c = 3$ y $d = -25$, determine el valor de las siguientes expresiones:

a) $a\,b\,c - d$

b) $\dfrac{a+b-5d}{a-b+5d}$

c) $\dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{3}b + \dfrac{1}{4}c - d$

d) $a^2 + b^3 - d^3$

e) $(a+b)\,c\,d$

f) $\dfrac{c}{a} + \dfrac{d}{a} - 3$

TRANSFORMACIÓN DE ENUNCIADOS VERBALES A LENGUAJE ALGEBRAICO

Para transformar un enunciado verbal a lenguaje algebraico debe leer atentamente y luego expresar lo leído utilizando lenguaje matemático.

Ejemplos de enunciados verbales frecuentes:

Generalizando

Un número aumentado en uno	$x + 1$
Un número aumentado en dos	$x + 2$
Un número aumentado en tres	$x + 3$

Un número aumentado en n es ⟶ $x + n$

Un número disminuido en uno	$x - 1$
Un número disminuido en dos	$x - 2$
Un número disminuido en tres	$x - 3$

Un número disminuido en n es ⟶ $x - n$

El doble de una cantidad	$2x$
El triple de una cantidad	$3x$
El cuádruplo de una cantidad	$4x$

n veces una cantidad es ⟶ $n\,x$

El cuadrado de una cantidad	x^2
El cubo de una cantidad	x^3
La cuarta potencia de una cantidad	x^4

La enésima potencia de una cantidad se representa ⟶ x^n

La mitad de una cantidad	$\frac{x}{2}$ o $\frac{1}{2}x$
La tercera parte de una cantidad	$\frac{x}{3}$ o $\frac{1}{3}x$
La cuarta parte de una cantidad	$\frac{x}{4}$ o $\frac{1}{4}x$

La enésima parte de una cantidad se representa ⟶ $\frac{x}{n}$ o $\frac{1}{n}x$

ACTIVIDAD **Complete la tabla con la expresión matemática correspondiente:**

Lenguaje común	Expresión matemática
El triple de una cantidad	
La mitad de una cantidad se disminuye en 6	
Al doble de una cantidad se le suman 2	
A una cantidad se le resta 14	
El cuádruplo de una cantidad	
El entero que sucede a x	
El entero que precede a y	
La suma de los 3 enteros que suceden a x +1	
El antecesor de un número	
El sucesor de un número	
El 20 % de una cantidad	
El doble de un número más el triple de otro	
El área de una baldosa rectangular de x cm de largo e y cm de ancho	
Un número entero impar	
La suma de tres números pares consecutivos	
La edad de una persona en 15 años más	
El precio de un artículo rebajado en un 30 %	
Si a tres veces la cantidad desconocida se suma 8, resulta 10	

TÉRMINOS ALGEBRAICOS

Un término algebraico está compuesto por un signo, un factor numérico y un factor literal.

Ejemplo:

Signo ⟵ $-\frac{1}{3}z^7$ ⟶ Factor Literal: z^7

↓

Factor Numérico: $-\frac{1}{3}$

TIPS

El factor literal incluye el o los exponente(s) de la(s) letra(s)

ACTIVIDAD Complete la tabla anotando en la columna correspondiente los elementos de los siguientes términos algebraicos:

Término	Signo	Factor numérico	Factor literal
$-3x^7$			
$-\frac{2}{3}p^8$			
$-7p^3m^9$			
$14xz^8$			
$0{,}28ny^5$			

TÉRMINOS SEMEJANTES

Dos términos son semejantes si tienen el mismo factor literal.

Ejemplos:

a) $2z^5$ es semejante con $-4z^5$ ← Porque en ambos términos el factor literal es z^5

b) $-17p^4x^2$ es semejante con $\frac{7}{3}p^4x^2$ ← Porque en ambos términos el factor literal es p^4x^2

ACTIVIDAD **Resuelva los siguientes ejercicios:**

1) Escriba tres términos semejantes para cada uno de los siguientes términos:

a) $-3mx$

b) $0{,}08\ m^4$

c) $\frac{2}{3}za^4$

2) Escriba el número de cada término de la columna A en el término semejante de la columna B.

A		B
(1)	$5a^3$	( ) x^8y
(2)	$-22x^8y$	( ) $3400hez^5$
(3)	$0{,}14b^2c$	( ) $-9a^3$
(4)	$10{,}05eh$	( ) $-1{,}4z^5eh$
(5)	$-3ez^5h$	( ) $-5b^2c$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Se define como expresión algebraica a aquella donde se presentan uno o más términos algebraicos separados por signos de adición o sustracción.

Ejemplos:

a) $16x - 3y$ ← Expresión algebraica formada por dos términos.

b) $3p - 5z + 8k$ ← Expresión algebraica formada por tres términos.

CLASIFICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Término algebraico	Ejemplos
1) Monomio: Son aquellas expresiones algebraicas que poseen solo un término algebraico.	**a)** $7a^2xz^9$ **b)** $\frac{acbe}{2}$
2) Binomios: Son aquellas expresiones algebraicas formadas por dos términos algebraicos, asociados por las operaciones de sumas o restas (+ –)	**a)** $x - 2y$ **b)** $4srz^3\,5a^5 + 2b^3$
3) Trinomios: Son aquellas expresiones algebraicas formadas por tres términos algebraicos, asociadas por adición o sustracción.	**a)** $5xz^9 + 6z^3 - 4xz^5$ **b)** $2x^5b - \frac{2}{3}x^4b^3 + 5x^3b^3$
4) Multinomios: Son aquellas expresiones algebraicas que están formadas por dos o más términos algebraicos, asociados por adición o sustracción.	**a)** $7x^5 - 7x^3y^5 + 3x^4y^2 + 2x^4y^2 - 5xy^4 + 10y^5$ **b)** $\frac{3}{5}f^5 + 8f^5g^8 - 3{,}09\,y^5 + 72g^3$

ACTIVIDAD **Complete la tabla con las expresiones algebraicas indicadas:**

Expresión	Nº de términos	Escriba dos ejemplos
Monomio		
Binomio		
Trinomio		
Multinomio		

GRADO DE UN TÉRMINO ALGEBRAICO

Se llama grado de un término algebraico a la suma de los exponentes del factor literal.

Ejemplos:

a) El grado de $16m^7p^3$ es 10 ← Porque la suma de los exponentes del factor literal m^7p^3 es 7 + 3 = 10.

b) El grado de $25x^3$ es 3 ← Porque el exponente del factor literal x^3 es 3.

c) El grado de $3x$ es 1 ← Porque el exponente del factor literal x es tácitamente 1.

ACTIVIDAD **Indique el grado de los siguientes términos algebraicos:**

1) El grado de $16y^7$ es ____

2) El grado de $21t^5z^4$ es ____

3) El grado 8 xyz es ____

4) El grado de $14a^5b^8c^5$ es ____

5) El grado de $34e^4g^8k^5m$ es ____

GRADO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

El grado de una expresión algebraica es el mayor grado de los términos que lo componen.

Ejemplos:

a) EL grado de $\underbrace{5x^2}_{\text{Término de grado 2}} + \overbrace{10x}^{\text{Término de grado 1}} - \underbrace{7}_{\text{Término de grado 0}}$ es 2. ← Porque el mayor grado de sus términos es 2.

b) EL grado de $\underbrace{5x^4}_{\text{Término de grado 4}} + \overbrace{7x^3}^{\text{Término de grado 3}} - \underbrace{\frac{2}{3}x^2}_{\text{Término de grado 2}} + \overbrace{10x}^{\text{Término de grado 1}} - \underbrace{7}_{\text{Término de grado 0}}$ es 4. ← Porque el mayor grado de sus términos es 4.

c) EL grado de $\underbrace{\frac{1}{4}x^2}_{\text{Término de grado 2}} - \overbrace{\frac{2}{3}y^2}^{\text{Término de grado 2}} + \underbrace{x^4y^3}_{\text{Término de grado 7}}$ es 7. ← Porque el mayor grado de sus términos es 7.

ACTIVIDAD **Indique el grado de las siguientes expresiones algebraicas:**

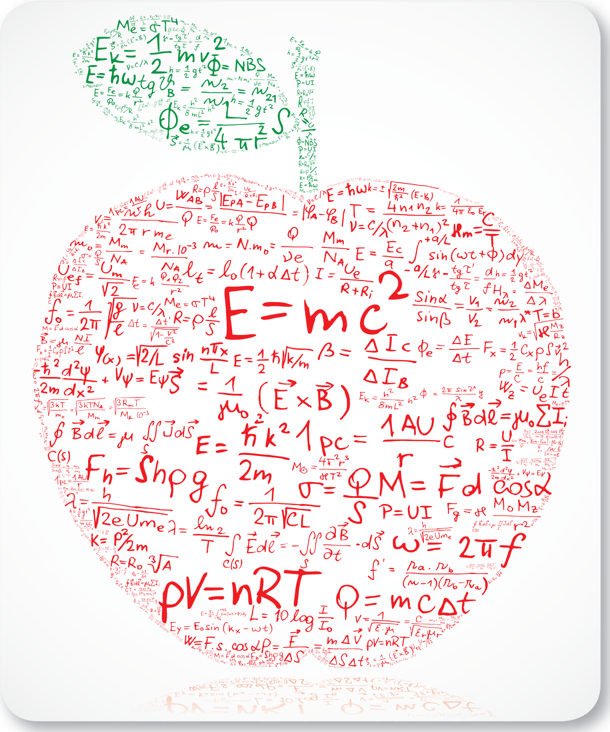
1) El grado de $23a^5 - 9h^3 + 16m^7$ es ☐

2) El grado de $16m^4p^8 + 21t^2z^7$ es ☐

3) El grado de $34c^4e^8 + 8g^8 + 3$ es ☐

4) El grado de $125a^3c - 9k^3pr + 165y^7$ es ☐

5) El grado de $\frac{acbe}{2} + e^3g - 9k^7pr + \frac{2}{3}y^8$ es ☐



REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES

Operación que consiste en sumar o restar términos con igual factor literal.
Para reducir términos semejantes, se suman o restan los **factores numéricos** y se conserva el **factor literal.**

Ejemplos

a) $2a + 3a = \underbrace{5}_{2+3}a$ Se conserva a

b) $-5x^2y^3 + 13x^2y^3 = \underbrace{8}_{-5+13}x^2y^3$ Se conserva x^2y^3

c) $a + 3b - c + 5a - 8b - 12c = \overbrace{6}^{1+5}\underbrace{a}_{\text{Se conserva } a} - \overbrace{5}^{3-8}\underbrace{b}_{\text{Se conserva } b} - \overbrace{13}^{-1-12}c$ Se conserva c

d) $15m^{x+1} - 5m^{x+1} - 3m^{x+1} = \underbrace{7}_{15-5-3}m^{x+1}$ Se conserva m^{x+1}

ACTIVIDAD Reduzca términos semejantes:

1) $x^2 + 4x - 5x + x^2 =$

2) $5a^4 - 3a^2 + a^4 + 4a^2 =$

3) $x^3 - 2x - x + 4 =$

4) $x^2 - 4x - 7x + 6 + 3x^2 - 5 =$

5) $m^2 + n^2 - 3n + 4n^2 - 5m^2 - 5n^2 =$

6) $3x - x^3 - 4x + 5 + x^3 + 4x^2 - 6 =$

Actividad en el cuaderno

Escriba en su cuaderno cómo usted comprende el procedimiento de resolución que se aplicó en los ejercicios anteriores.

REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES AGRUPADOS CON PARÉNTESIS

Regla general para eliminación de paréntesis:

Para suprimir un paréntesis precedido por el signo +, cada uno de los términos que se encuentran dentro del paréntesis, **mantienen** su mismo signo.

Ejemplo:

$a + (-x - y + z) = a - x - y + z$

Para suprimir un paréntesis precedido por el signo –, se **cambia** cada uno de los signos de los términos que se encuentran dentro del paréntesis.

Ejemplo:

$a - (-x - y + z) = a + x + y - z$

Ejemplos:

a) $2x + (5y - 14x) + 15y - (6x - 10y) = 2x + 5y - 14x + 15y - 6x + 10y$ ← Se suprimen los paréntesis

$= -18x + 30y$ ← Se reducen los términos semejantes

b) $6a + [14b - (-11a - 10b)] = 6a + 14b - (-11a - 10b)$ ← Se suprimen los paréntesis

$= 6a + 14b + 11a + 10b$ ← Se suprimen los paréntesis

$= 17a + 24b$ ← Se reducen los términos semejantes

ACTIVIDAD **Resuelva paréntesis y reduzca términos semejantes:**

1) $3b - (2b + a) =$

2) $x - [2y - 2(x + 2y) + 5y] =$

3) $9y + [3x - (y + 4x)] =$

4) $4x - [9 - 4(3 - x)] =$

e) $3b - (-b - 2b - 4a) - 4b =$

f) $-[6y^3 - (y - y^2 + 6y - 8y^3)] =$

g) $2(5x - y) - (7x + y) =$

h) $2y - [x - 2(x - y)] - [2y - (x + y)] =$

MULTIPLICACIÓN DE UN MONOMIO POR UN MULTINOMIO

El proceso para desarrollar la multiplicación de monomios se realiza de la siguiente manera:
Se multiplican los coeficientes numéricos y si existen factores literales con base en común, se multiplican siguiendo las reglas de las potencias, es decir, se conserva la base y se suman los exponentes.

Ejemplo:

$$2x^3 \cdot (6x^4y) = 2 \cdot 6 \cdot x^{(3+4)} \cdot y$$
$$= 12x^7y$$

ACTIVIDAD **Resuelva los siguientes ejercicios:**

1) $3x \cdot 3x^2y \cdot 7y^3 =$

2) $\frac{7}{9}x^2b \cdot \frac{2}{21}x =$

3) $3a \cdot (3a)^{8x-2} \cdot (2a)^{3x+5} =$

4) $(ax)^3 \cdot (ax)^2 \cdot ax =$

5) $(z^2)^3 \cdot z^5 \cdot x^6 =$

6) $(x^2)^3 \cdot (x^3)^4 \cdot x^6 =$

MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS POR UN POLINOMIO

Para multiplicar un monomio por un polinomio se debe multiplicar el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

Ejemplo:

$$a \cdot (3a^3 + 15) = a \cdot 3a^3 + a \cdot 15$$
$$= 3a^4 + 15a$$

Aplicando la ley distributiva de la multiplicación sobre la suma

TIPS
Cuando se multiplica un monomio por un multinomio, se utiliza la propiedad distributiva.

ACTIVIDAD **Resuelva los siguientes ejercicios:**

1) $2x \cdot (x-2y) =$

2) $\frac{2}{3}x \cdot (\frac{3}{2}x - 3y) =$

3) $(2xy - 5y^2x) \cdot -6xy =$

4) $-7x \cdot (2-3x^2 - 5x^3) =$

5) $2b \cdot (3a + 4b - 5c) =$

6) $3m^2 \cdot (5m-7n) - 3m \cdot (2m^2+4n) =$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Esta operación es análoga a la multiplicación de un monomio por un multinomio, se aplica también la ley distributiva de la multiplicación sobre la suma.

Ejemplo:

$$(a - 6) \bullet (a^3 + b) = a \bullet (a^3 + b) - 6 \bullet (a^3 + b)$$

$$= a^4 + ab - 6a^3 - 6b$$

ACTIVIDAD **Desarrolle cada multiplicación de polinomios detalladamente:**

1) $(x + y) \bullet (x^2 - y^2) =$

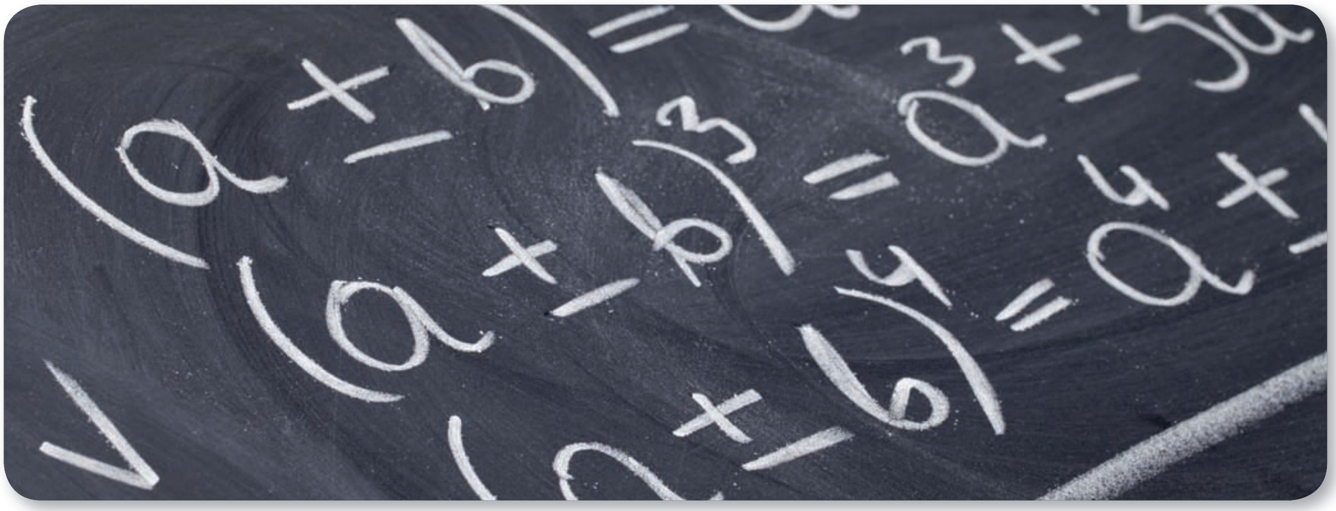
2) $(2x - 6y) \bullet (x^2 - 2xy^2) =$

3) $(m^2 - n^2 - mn) \bullet (2m + 4n + 1) =$

4) $(3m - 2n) \bullet (2m + n) =$

5) $(a^3 + 5) \bullet (a^2 + 5) =$

6) $(x + y) \bullet (x^2 + 2xy + y^2) =$



EVALUACIÓN

Resuelva los siguientes ejercicios

I) Marque la alternativa correcta:

1) Si $a = -3$ y $b = 11$, el valor de la expresión; $\dfrac{a + b}{4}$ es:

a) -2 **b)** -1 **c)** 1 **d)** 2

2) Si $a = -10$ y $b = -5$, el valor de la expresión: $\dfrac{a - b}{b}$ es:

a) - 3 **b)** -1 **c)** 1 **d)** 3

3) Si $a = 3$ y $b = 7$, el valor de la expresión: $\dfrac{(a + b)(a - b)}{2}$ es:

a)-50 **b)** - 20 **c)** 20 **d)**50

4) Si $b = 2{,}8$; $c = 1{,}9$ y $h = 1{,}4$, el valor de la expresión; $\dfrac{(b + c) \bullet h}{2}$ es:

a) 2,39 **b)** 3,29 **c)** 4,29 **d)** 32,9

5) El enunciado «un número disminuido en dos», representa a la expresión:

a) $x + 2$ **b)** $x - 2$ **c)** $\dfrac{x}{2} -2$ **d)** $3 (y - 1)$

6) El enunciado «el triple de un número se aumenta en 1», representa a la expresión:

a) $3y - 1$ **b)** $3(y + 1)$ **c)** $3y + 1$ **d)** $3(y - 1)$

7) El enunciado «al cubo de un número se resta 6», representa a la expresión:

a) $x^3 - 6$ **b)** $(x - 6)^3$ **c)** $x^3 + 6$ **d)** $3x - 6$

8) La expresión $2x + 5$, corresponde al enunciado:

a) El doble de x se aumenta en 5 **b)** La mitad de x más 5 **c)** Al doble de x se resta 5 **d)** a la mitad de x se resta 5

9) La expresión $\dfrac{x}{2} + 1$, corresponde al enunciado:

a) La mitad de x se disminuye en 1 **b)** El doble de x se aumenta en 1 **c)** La mitad de x aumenta en 1

d) El doble de x se disminuye en 1

II) Exprese los siguientes enunciados en lenguaje algebraico:

a) Un número aumentado en 6

b) La tercera parte de un número

c) Cinco tercios más la mitad de x

d) Un número disminuido en 1

e) Tres cuartos de un número

f) El doble de un número

g) El doble de un número más cinco unidades

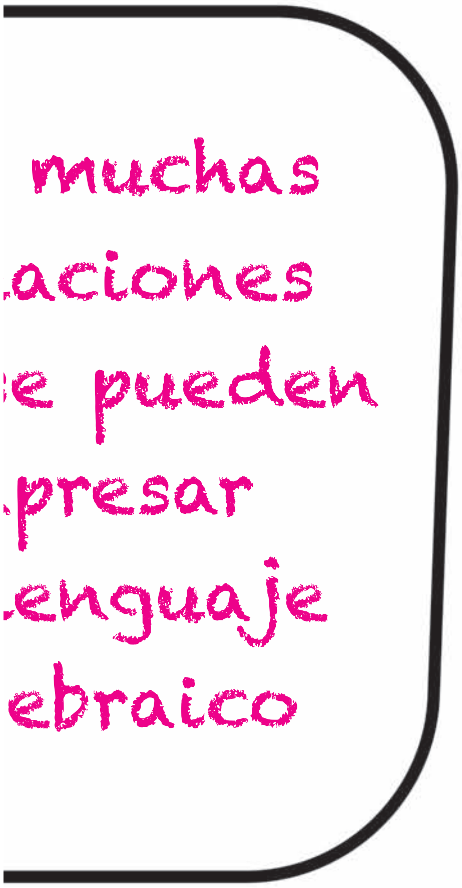
h) Dos tercios de un número menos seis séptimos de otro

i) El 25 % de un número

j) Un número menos el 60 % de él

k) El cuadrado del antecesor de un número natural

l) La mitad del antecesor de un número



m) El triple de b

n) El cuádruplo de a

ñ) El quíntuplo de y

o) La mitad de a

p) La décima parte de z

q) El cuadrado de x

r) El cubo de b

s) El cuadrado del cuadrado de a

t) La quinta potencia de y

u) El antecesor de n

v) El sucesor de w

w) El 20% de x

PRODUCTOS NOTABLES

Son productos algebraicos que cumplen con reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación. Los productos que se verán en esta guía son: Cuadrado de binomio; Suma por su diferencia; Multiplicación de binomios con un término común; Cubo de binomio.

CUADRADO DE BINOMIO

Hay dos tipos de cuadrado de binomio con sus correspondientes reglas de desarrollo:

CUADRADO DE BINOMIO SUMA	CUADRADO DE BINOMIO DIFERENCIA
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

TIPS

El cuadrado de un binomio se puede definir como:
"El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más o menos el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término"

Ejemplos:

a)

$$(\underbrace{3x}_{\text{Primer término}} - \underbrace{7}_{\text{Segundo término}})^2 = \overbrace{(3x)^2}^{\text{Cuadrado del primer término}} - \overbrace{2 \cdot 3x \cdot 7}^{\text{Doble del primer término por el segundo}} + \underbrace{(-7)^2}_{\text{Cuadrado del segundo término}}$$

Aplicando la expresión $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$= 9x^2 - 42x + 49$$

b) $(x+3)^2 = x^2 + 2\ \text{x} \bullet 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

c) $(3y-5)^2 = (3y)^2 - 2 \bullet (3y) \bullet 5 + 5^2 = 9y^2 - 30y + 25$

d) $(1+a)^2 = 1^2 + 2 \bullet 1 \bullet a + a^2 = 1 + 2a + a^2$

e) $(b-3x)^2 = b^2 - 2 \bullet b \bullet (3x) + (3x)^2 = b^2 - 6bx + 9x^2$

ACTIVIDAD **Desarrolle de forma algebraica los siguientes cuadrados de binomio:**

1) $(a + 7)^2 =$		**7)** $(3x - 2y)^2 =$	
2) $(a + 4)^2 =$		**8)** $(x - \frac{1}{x})^2 =$	
3) $(3a + 1)^2$		**9)** $(2a + 3b)^2 =$	
4) $(z + 6)^2 =$		**10)** $(5xy + 4y)^2 =$	
5) $(a - 3)^2 =$		**11)** $(3 - zx)^2 =$	
6) $(k - 8m)^2 =$		**12)** $(z - 6\ )^2 =$	

Actividad en el cuaderno

1) **Desarrolle el producto** $(a+b)^2$ **usando la propiedad distributiva en** $(a+b)(a+b)$**, luego reúna términos semejantes y vea que se obtiene** $a^2 + 2ab + b^2$

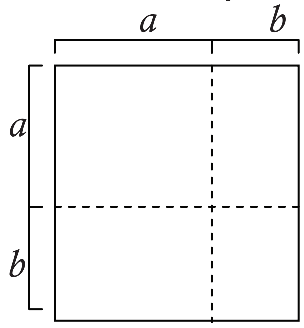
2) **Desarrolle el producto** $(a - b)^2$ **usando la propiedad distributiva en** $(a - b)(a - b)$**, luego reúna términos semejantes y vea que se obtiene** $a^2 - 2ab + b^2$

ACTIVIDAD

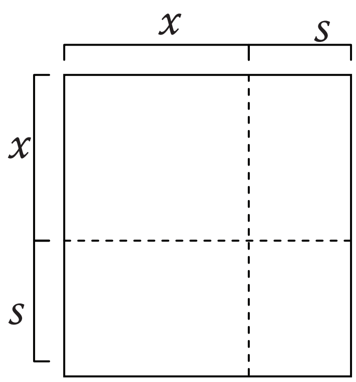
El siguiente ejercicio le brindará una ilustración geométrica del cuadrado de binomio: La figura representa un cuadrado, con relación a esta figura, escriba expresiones algebraicas para:

1) la medida de su lado
2) su área, considerando sólo la medida de su lado
3) cada una de las áreas menores en su interior, hágalo en la figura
4) su área considerando solo las áreas menores

¿Qué relación se puede establecer entre las expresiones algebraicas obtenidas en (2) y en (4)?



Repita la actividad anterior con la siguiente figura:



Actividad en el cuaderno

Represente geométricamente las siguientes expresiones algebraicas:

a) $(a + 7)^2$

b) $(a + 4)^2$

c) $(3a + 1)^2$

d) $(z + 6)^2$

e) $(x + 5)^2$

f) $(x + 9)^2$

g) $(5 + y)^2$

SUMA POR DIFERENCIA

Es la multiplicación de dos binomios (expresiones formadas por dos términos) que se diferencian solo en el signo que tienen en medio, uno es de suma y el otro de resta. Se desarrolla de acuerdo a la siguiente expresión:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo:

$$(x + 6)(x - 6) = x^2 - 6^2 = x^2 - 36$$

ACTIVIDAD **Desarrolle cada suma por diferencia aplicando la fórmula tal como se mostró en el ejemplo:**

1) $(m + 3)(m - 3) =$

2) $(k + 2)(k - 2) =$

3) $(s + 1)(s - 1) =$

4) $(2x + y)(2x - y) =$

5) $(3b + c)(3b - c) =$

6) $(5x + 3y)(3y - 5x) =$

Actividad en el cuaderno

Desarrolle el producto *(a+b)(a-b)* usando la propiedad distributiva, reúna términos semejantes y vea que se obtiene $a^2 - b^2$

MULTIPLICACIÓN DE BINOMIOS CON TÉRMINO COMÚN

Son los productos de la forma: $(x + a)(x + b)$ Para desarrollarlos utilizamos la siguiente expresión algebraica

$$\boxed{(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab}$$

Ejemplo:

$$(x + 3)(x + 5) = x^2 + (3 + 5)x + 3 \cdot 5 = x^2 + 8x + 15$$

ACTIVIDAD **Resuelva las siguientes multiplicaciones de binomios con término común:**

a) $(x + 7)(x + 1) =$

b) $(x + 3)(x - 2) =$

c) $(x - 5)(x - 4) =$

d) $(x - 5y)(x - 5y) =$

e) $(y - 1)(y + 5) =$

f) $(y^2 + 1)(y^2 - 3) =$

Actividad en el cuaderno

Desarrolle el producto $(x+a)(x+b)$ usando la propiedad distributiva, reúna términos semejantes y vea que se obtiene $x^2 + (a+b)x + ab$

CUBO DE BINOMIO

Lo mismo que en el cuadrado de binomio, hay dos tipos de **cubo de binomio** con sus correspondientes reglas de desarrollo:

TIPS

Recuerde:

- **Binomio** es una expresión algebraica formada por dos términos.
- Algebraicamente **cubo** significa elevado a 3.

CUBO DE BINOMIO SUMA	CUBO DE BINOMIO DIFERENCIA
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Ejemplos:

1) $(2+y)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot y + 3 \cdot 2 \cdot y^2 + y^3 = 8 + 12y + 6y^2 + y^3$

2) $(x-4)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 4 + 3 \cdot x \cdot 4^2 - 4^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

3) $(3x-7)^3 = (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 7 + 3 \cdot (3x) \cdot 7^2 - 7^3 = 27x^3 - 189x^2 + 441x - 343$

ACTIVIDAD **Desarrolle cada cubo de binomio aplicando la fórmula correspondiente tal como se mostró en el ejemplo:**

1) $(4+x)^3 =$

2) $(1-2y)^3 =$

3) $(4x-3y)^3 =$

4) $(2a+1)^3 =$

5) $(3x-2y)^3 =$

6) $(x2+1)^3 =$

Actividad en el cuaderno

1) El producto $(a+b)^3$ se puede expresar como $(a+b)^2(a+b)$ y luego éste se puede expresar como $(a^2+2ab+b^2)(a+b)$. Desarrolle este último producto usando la propiedad distributiva, luego reúna términos semejantes y vea que se obtiene $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$

2) De manera parecida al ejercicio anterior, el producto $(a-b)^3$ se puede expresar como $(a-b)^2(a+b)$ y luego éste se puede expresar como $(a^2 - 2ab + b^2)(a-b)$. Desarrolle este último producto usando la propiedad distributiva, luego reúna términos semejantes y vea que se obtiene $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

FACTORIZACIÓN

Factorizar una expresión algebraica es expresarla como la multiplicación de 2 más factores.

Ejemplos:

1) Factorizar $x^2 - 36$. Al escribir esta expresión como un producto de factores queda, $(x+6)(x-6)$.
En este caso los factores son $(x+6)$ y $(x-6)$.

2) Factorizar $x^2 - 12x + 36$. Al escribir esta expresión como un producto de factores queda, $(x+6)^2$.

3) Al factorizar $x^2 - 13x + 36$ queda, $(x-4)(x-9)$.

4) Al factorizar $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, se obtiene $(x-y)^3$.

TIPS

Si la expresión algebraica a factorizar es el resultado de un producto notable, hay que escribir esa expresión como el producto notable que le corresponde.

Usted aprenderá a factorizar expresiones algebraicas reconociendo el producto notable a que corresponden y escribiéndolo. Por eso, a continuación, se agruparán los casos más importantes de factorización por productos notables, siguiendo el orden visto anteriormente.

TRINOMIO QUE ES UN CUADRADO DE BINOMIO SUMA	TRINOMIO QUE ES UN CUADRADO DE BINOMIO DIFERENCIA
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$	$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

Ejemplos:

1) Factorizar $x^2 + 12x + 36$.
En este caso x^2 y 36 son los cuadrados de x y 6 respectivamente,
y el término $12x$ es el doble del producto $6 \bullet x$
Por lo tanto:

$x^2 + 12x + 36 = x^2 + 2 \bullet x \bullet 6 + 6^2 = (x+6)^2$

2) Factorizar: $9a^2 + 12ab + 4b^2$.

En este caso $9a^2$ y $4b^2$, son los cuadrados perfectos de $3a$ y $2b$ respectivamente y el término $12ab$, es doble de $3a \cdot 2b$.

Por lo tanto:

$$9a^2 + 12ab + 4b^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 2b + (2b)^2 = (3a + 2b)^2$$

3) Factorizar, $1 - 6x + 9x^2$.

En este caso 1 y $9x^2$ son los cuadrados de 1 y $3x$ respectivamente, y el término $6x$ es el doble del producto $1 \cdot 3x$.

Por lo tanto:

$$1 - 6x + 9x^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot (3x) + (3x)^2 = (1 - 3x)^2$$

4) Factorizar: $4m^2 - 2mx + \frac{x^2}{4}$.

En este caso: $4m^2$ y $\frac{x^2}{4}$, son los cuadrados perfectos de $2m$ y $\frac{x}{2}$ respectivamente y el término que queda: $2mx$, es doble de $2m \cdot \frac{x}{2}$.

Por lo tanto:

$$4m^2 - 2mx + \frac{x^2}{4} = (2m)^2 - 2 \cdot 2m \cdot \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(2m - \frac{x}{2}\right)^2$$

ACTIVIDAD **Factorice cada expresión:**

a) $x^2 + 6x + 9 =$

b) $4a^2 - 4ay + y^2 =$

c) $25x^2 + 60xy + 36 =$

d) $4x^2 - 2xy + \frac{y^2}{16} =$

DIFERENCIA DE CUADRADOS

Una diferencia de cuadrados una expresión del tipo $a^2 - b^2$ en la que a^2 y b^2 son los cuadrados de a y b respectivamente. Su factorización es $(a + b)(a - b)$, es decir:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Ejemplos:

1) Una diferencia de cuadrados es x^2 - **36** en la que x^2 y **36** son los cuadrados de x y **6** respectivamente. Al escribir esta expresión como un producto de factores queda, $(x+6)(x-6)$.

2) La diferencia, $4x^2 - 16b^2$ se factoriza, $(2x + 4b)(2x - 4b)$

3) $9a^2 - 1 = (3a + 1)(3a - 1)$

ACTIVIDAD **Factorice:**

1) $x^2 - 64 =$

2) $16x^2 - 81a^2 =$

3) $25u^2 - 36b^2 =$

4) $1 - 64b^2 =$

5) $0{,}09x^2 - 0{,}16b^2 =$

6) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{b^2} =$

TRINOMIO ORDENADO QUE ES EL PRODUCTO DE BINOMIOS CON UN TÉRMINO COMÚN

Este caso corresponde al procedimiento inverso del desarrollo del producto de binomios con un término común, visto anteriormente (pág. 26). Entonces se desarrolló el producto, $(x + 5)(x + 3)$ obteniéndose $x^2 + 8x + 15$. Recuérdese que $8 = 5 + 3$ y $15 = 3 \cdot 5$. Por lo tanto, para factorizar $x^2 + 8x + 15$ hay que invertir el proceso, escribiendo primero un producto de binomios con el término común x, esto es, $(x \quad)(x \quad)$ y, luego, para completar el producto, buscar dos números tales que sumados den +8 y multiplicados den +15. Estos números son obviamente +5 y +3. Apliquemos una vez más estas ideas:

Ejemplos:

1) Factorizar: $x^2 + 6x + 8$
Escribimos, $(x \quad)(x \quad)$. Luego, buscamos dos números tales que sumados den $+6$ y multiplicados den $+8$. Estos números son $+2$ y $+4$.
Por lo tanto la factorización buscada es $(x + 2)(x + 4)$.

2) Factorizar: $y^2 - 5y + 6$
Escribimos, $(y \quad)(y \quad)$. Dos números tales que sumados den -5 y multiplicados den $+6$. Estos números son -2 y -3.
Por lo tanto la factorización buscada es $(y - 2)(y - 3)$.

3) Factorizar: $b^2 - b - 2$
Escribimos, $(b \quad)(b \quad)$. Dos números tales que sumados den -1 y multiplicados den -2. Estos números son -2 y $+1$.
Entonces la factorización buscada es $(b - 2)(b + 1)$.

Observación: Solo algunos trinomios ordenados pueden factorizarse como un producto de binomios con término común. He aquí una breve lista de trinomios no factorizables:
a) $x^2 + 2x + 3$ **b)** $x^2 + 6x - 8$ **c)** $x^2 + x - 1$ **d)** $x^2 - 5x - 7$

ACTIVIDAD **Factorice cada trinomio ordenado:**

a) $x^2 + 7x + 6 =$

b) $a^2 + 8a + 15 =$

c) $c^2 + 4c - 21 =$

d) $m^2 - 2m - 8 =$

e) $p^2 - 9c + 20 =$

f) $k^2 + 15k - 16 =$

TABLA DE RESUMEN

PRODUCTO NOTABLE →

Expresión	Desarrollo
$(x + y)^2$	$x^2 + 2xy + y^2$
$(x - y)^2$	$x^2 - 2xy + y^2$
$(x + y)(x - y)$	$x^2 - y^2$
$(x + a)(x + b)$	$x^2 + (a + b)x + ab$
$(x + y)^3$	$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
$(x - y)^3$	$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

← FACTORIZACIÓN

Actividad en el cuaderno

Resolver de acuerdo a lo indicado:

1) Desarrolle cada cuadrado de binomio:

a) $(2y + 3)^2 =$ **b)** $(x - 6)^2 =$ **c)** $\left(\frac{x}{2} - 8\right)^2 =$

2) Desarrolle cada suma por diferencia:

a) $(5x + 3y)(5x - 3y) =$ **b)** $(4u + 10c)(4u - 10c) =$ **c)** $(7x + 2y)(2y - 7x) =$

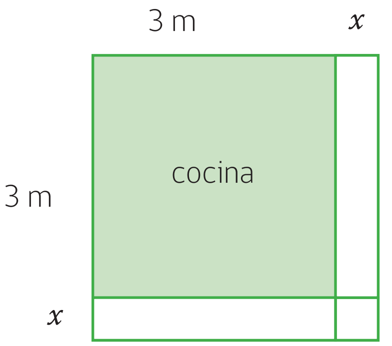
3) Desarrolle cada multiplicación de binomios con término común:

a) $(j + 3)(j + 6) =$ **b)** $(p - 4)(p - 2) =$ **c)** $(g + 1)(g - 5) =$

4) Desarrolle directamente los siguientes cubos de binomio:

a) $(2a + 3b)^3 =$ **b)** $(z - 6)^3 =$

5) Se desea ampliar una cocina que tiene forma cuadrada de 3 metros por lado, en una determinada cantidad de metros (x), tal como lo muestra el siguiente dibujo:



a) ¿Qué expresión algebraica representa la nueva área de la cocina?

b) Si la ampliación considera 1,5 metros más por lado, ¿cuál es la nueva superficie que tendrá la cocina?

Guía de trabajo Nº 2

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Contenido

- Ecuaciones de primer grado con una incógnita.

IGUALDAD

La relación matemática de igualdad se denota "=" e indica que dos expresiones numéricas tienen el mismo valor.

Ejemplo:

Observe la siguiente igualdad numérica:

23 + 6 = 42 – 10 – 3

Las cantidades y expresiones colocadas al lado izquierdo del signo de igualdad: constituyen el **primer** miembro de la igualdad.

Las cantidades y expresiones colocadas al lado derecho del signo de igualdad: forman **segundo**miembro de la igualdad.

RELACIÓN BALANZA – IGUALDAD

Si se busca mantener el equilibrio en una balanza, al agregar peso de uno de sus lados es necesario agregar el mismo peso en el otro lado. Ocurre lo mismo si quitamos peso. Del mismo modo en una igualdad matemática, si sumamos o restamos un número en uno de sus miembros es necesario hacerlo en el otro miembro para mantener la igualdad.

Por otro lado, el equilibrio en la balanza también se mantiene si el peso en cada plato es duplicado, o si es triplicado, o reducido a la mitad, o a la tercera parte, etc. En el caso de una igualdad matemática, ésto significa que la igualdad se mantiene si se multiplica cada lado por un mismo número; también se mantiene si se divide cada lado por un mismo número.

Ejemplos:

a) Si sumamos 4 en el **primer** miembro de la igualdad numérica 23 + 6 = 42 - 10 - 3, para mantener la igualdad sumamos 4 al **segundo** miembro.
De la siguiente forma:

23 + 6 + 4 = 42 - 10 - 3 + 4
33 = 33

b) Si en la igualdad numérica 23 + 6 = 42 - 10 - 3, multiplicamos por 2 el **primer** miembro, para mantener la igualdad también multiplicamos por 2 el **segundo** miembro.
Entonces:

2 • (23 + 6) = 2 • (42 - 10 - 3)
2 • 29 = 2 • 29
58 = 58

ECUACIÓN

Ecuación según la Real Academia Española significa Igualdad que contiene una o más incógnitas. Una ecuación de primer grado con una incógnita es aquella que tiene solo un término desconocido el cual tiene grado 1.

Ejemplo:

$$\boxed{x + 25 = 56} \longrightarrow \text{Ecuación}$$

Incógnita: x

CÓMO RESOLVER ECUACIONES DE PRIMER GRADO Y UNA INCÓGNITA

Resolver una ecuación consiste en determinar el valor de la incógnita que hace verdadera la igualdad. Esto significa despejar la incógnita que es dejarla sola en un miembro de la igualdad. Para lograrlo se puede utilizar la analogía de la balanza explicada en la página anterior.

Ejemplos:

1) Determinar el valor de x en la ecuación: $x - 6 = 12$

$$x - 6 = 12$$
$$x - 6 + 6 = 12 + 6$$
$$x = 18$$

Se suma el inverso aditivo de -6, que es el número 6, a ambos lados de la igualdad.

2) Determinar el valor de x en la ecuación: $60 = x - 4$

$$60 = x - 4$$
$$60 + 4 = x - 4 + 4$$
$$64 = x$$

Se suma el inverso aditivo de -4, que es el número 4, a ambos lados de la igualdad.

3) Determinar el valor de x en la ecuación: $x + 6 = 24$

$$x + 6 = 24$$
$$x + 6 - 6 = 24 - 6$$
$$x = 18$$

Se suma el inverso aditivo de 6, que es el número -6, a ambos lados de la igualdad.

4) Determinar el valor de x en la ecuación: $64 = x + 4$

$$64 = x + 4$$
$$64 - 4 = x + 4 - 4$$
$$60 = x$$

Se suma el inverso aditivo de 4, que es el número -4, a ambos lados de la igualdad.

5) Determinar el valor de x en la ecuación: $3x = 8$

$$3x = 8$$

$$3x \cdot \frac{1}{3} = 8 \cdot \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{8}{3}$$

Se multiplica por el inverso multiplicativo de 3, que es el número $\frac{1}{3}$, a ambos lados de la igualdad.

6) Determinar el valor de x en la ecuación: $21 = 6x$

$$21 = 6x$$

$$21 \cdot \frac{1}{6} = 6x \cdot \frac{1}{6}$$

$$\frac{7}{2} = x$$

Se multiplica por el inverso multiplicativo de 6, que es el número $\frac{1}{6}$, a ambos lados de la igualdad.

7) Determinar el valor de x en la ecuación: $\frac{x}{3} = 6$

$$\frac{x}{3} = 6$$

$$\frac{x}{3} \cdot 3 = 6 \cdot 3$$

$$x = 18$$

Se multiplica por el inverso multiplicativo de $\frac{1}{3}$, que es el número 3, a ambos lados de la igualdad.

8) Determinar el valor de x en la ecuación: $12 = \frac{x}{5}$

$$12 = \frac{x}{5}$$

$$12 \cdot 5 = \frac{x}{5} \cdot 5$$

$$60 = x$$

Se multiplica por el inverso multiplicativo de $\frac{1}{5}$, que es el número 5 a ambos lados de la igualdad.

9) Determinar el valor de x en la ecuación: $\frac{7x}{4} + 1 = \frac{x}{2}$

$\frac{7x}{4} - \frac{x}{2} = -1$ ← Se agrupan las incógnitas en un miembro de la igualdad y los números en el otro

$\frac{7x-2x}{4} = -1$ ← Se resuelve la operatoria en cada miembro de la igualdad

$\frac{5x}{4} = -1$

$\frac{5x}{4} \bullet 4 = -1 \bullet 4$ ← Se multiplica por el inverso multiplicativo de $\frac{1}{4}$, que es el número 4 a ambos lados de la igualdad.

$5x = -4$

$x = \frac{-4}{5}$ ← Multiplicando la igualdad por el inverso multiplicativo de 5, el número $\frac{1}{5}$

ACTIVIDAD **Resuelva las siguientes ecuaciones:**

1) $x + 8 = 15$

2) $3x + 14 = 4x - 6$

3) $3x = 7x + 28$

4) $x - 14 = -10$

5) $10x + 5 = 55$

6) $\frac{x}{4} + \frac{x}{3} = 12$

7) $7x + 42 = 6x + 47$

8) $12 = 5x + 27$

9) $\frac{x}{4} + \frac{x+2}{7} = x - 7$

10) $-3 + x + 4 = -1 + -2$

11) $5x + 1 = 4x - 1$

12) $3(x + -2) = -15$

13) $x + 3 + x + 1 = 4(x + 1)$

14) $4(x + 3) - 11(x - 7) = 4(5x + 2)$

15) $100a = -1000$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS APLICANDO ECUACIONES PRIMER GRADO Y UNA INCÓGNITA

Ejemplos:

1) Si al quíntuplo de un número le resto ese número, se obtiene 104
¿Cuál es el número?

x: el número buscado

$$5x - x = 104$$

Se resuelve la igualdad con las propiedades vistas anteriormente:
anteriormente:

$$4x = 104$$

$$4x = 104 \ / \bullet \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \bullet 4x = \frac{1}{4} \bullet 104$$

$$x = 26$$

Respuesta: El número buscado es 26

2) La edad de María es 15 años más que el triple que la edad de su sobrina Rosa. Determine las edades de la sobrina y la tía si se sabe que suman 59 años.

x: La edad de Rosa. Entonces la edad de María: $3x + 15$

$$x + (3x + 15) = 59$$

$$x + 3x + 15 = 59$$

$$4x + 15 = 59 \ / - 15$$

$$4x = 44 \ / \bullet \frac{1}{4}$$

$$x = 26$$

Respuesta: Rosa tiene 11 años. Su tía, María tiene 3 • 11 + 15 = 48

3) Tengo \$ 20.000 para comprar 3 sacos de cemento pero debo separar \$ 8.000 para comprar chancado, **¿cuánto dinero podré gastar como máximo en cada saco de cemento?**

Sea x la cantidad máxima de dinero para comprar cada saco de cemento (en este caso no quedará vuelto):

$$3x + 8.000 = 20.000 \;/ -8.000$$
$$3x = 12.000 \;/ \cdot \frac{1}{3}$$
$$x = 4.000$$

Respuesta: En cada saco de cemento se puede gastar $4. 000 como maximo

Actividad en el cuaderno

Escriba cada situación en lenguaje matemático y luego resuelva:

1) La edad de Rocío y Luisa suman 60 años. Si la edad de Luisa, es el doble de la edad de Rocío, **¿Qué edad tiene cada una?**

2) Si al doble de un número se le aumenta 7, resulta ser 35. Determine el número.

3) La suma de tres números enteros consecutivos es 51. **¿Cuáles son esos números?**

4) La mitad de un número supera en 2 a un tercio de este. Determine el número.

5) La tercera parte de un número es 7 unidades menor que la mitad de él. Determine el número.

6) Siete veces un número menos el cuádruple del mismo número es 45.

7) Tres números enteros suman -2. Un de ellos es x, el otro es $x - 4$ y el último, $3x + 7$. **¿Cuáles son los números?**

8) El doble de un número menos el quíntuple del mismo número da -81. **¿Cuál es el número?**

9) Dos números enteros consecutivos suman 601. Halle los números.

10) Tres números enteros consecutivos suman 540. Determine los números.

11) Un número más el doble de su sucesor da 62. **¿Cuáles son los números?**

12) Juan, Jorge y Tomás ganan entre los tres 120 láminas. Jorge ganó 20 menos que Juan y Tomás ganó el doble que Jorge. **¿Cuánto ganó cada uno de ellos?**

13) El doble de la suma de un número con 5 es igual a 24 **¿Cuál es el número?**

14) En tres días un hombre ganó $ 185.000. Si cada día ganó el triple de lo que ganó el día anterior, **¿cuánto ganó cada día?**

15) Pedro corrió un total de 6.600 metros en tres noches. Si cada noche el aumentó la distancia recorrida en 440 m **¿cuántos metros corrió la primera noche?**

EVALUACIÓN

I) Marque la alternativa correcta:

1) Si a la mitad de un número se le suma 5, resulta 13. El número es:

a) 1 **b)** 16 **c)** 20 **d)** 30

2) Si sumamos $\frac{3}{4}$ a un número, el resultado es, $\frac{-3}{2}$ entonces el número es:

a) $\frac{-9}{4}$ **b)** $\frac{3}{4}$ **c)** $\frac{9}{4}$ **d)** $\frac{5}{2}$

3) Tamara leyó 21 revistas en 3 días. Cada día ella leyó 4 revistas más que el día anterior, **¿cuántas revistas leyó el tercer día?**

a) 3 **b)** 7 **c)** 10 **d)** 11

4) Elvira tiene dos años más que Andrés. La suma de sus edades es 20, **¿qué edad tiene Elvira?**

a) 8 **b)** 9 **c)** 10 **d)** 11

5) Las edades de tres personas suman 90 años. La mayor tiene 4 años más que la segunda y ésta tiene 7 años más que la menor. **¿Qué edad tiene la segunda persona?**

a) 11 años **b)** 18 años **c)** 24 años **d)** 31años

6) Tenemos una caja de 70 dulces que contiene chocolates, gomitas y mentitas. Si tenemos el doble de chocolates que de mentitas, y el doble de gomitas que de chocolates, y llamamos x al número de mentitas, **¿qué ecuación relaciona los datos del problema?**

a) $x + 2x = 70$ **b)** $2x + 4x = 70$ **c)** $x + 2x + 4x = 70$ **d)** $x + 2x + 2x = 70$

7) Un rectángulo de 56 m de perímetro tiene triple de longitud en la base que en la altura. Si llamamos x a la altura del rectángulo, **¿qué ecuación relaciona los datos del problema?**

a) $x \cdot 3x = 56$ **b)** $x + 3x = 56$ **c)** $6x + 2x = 56$ **d)** $2x + 2(x + 3) = 56$

8) Un niño con \$174 compra 34 dulces, unos de \$3 y otros de \$7. **¿Cuántos dulces de \$7 compró?**

a) 14 **b)** 15 **c)** 16 **d)** 18

9) El área de un patio cuadrado es 431 m². Si llamamos x a uno de los lados del patio,
¿qué ecuación expresa el área del patio?

a) $x^2 = 431$ **b)** $2x = 431$ **c)** $4x = 431$ **d)** $4x^2 = 431$

II) Resuelva las siguientes situaciones:

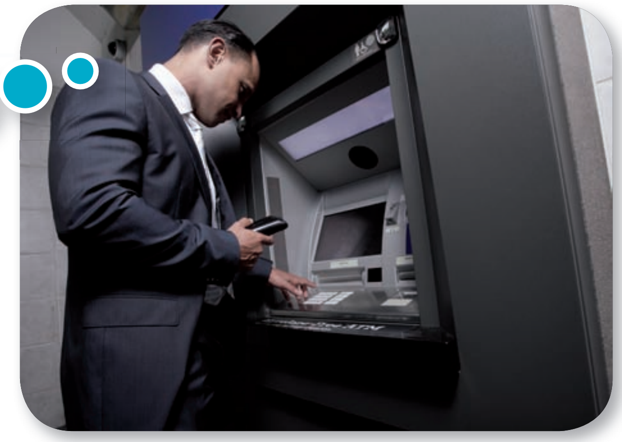
1)

Si al doble de mi edad le quita el triple de la edad que tenía hace 40 años obtendrá mi edad actual.

Calcule la edad del abuelo:

2)

No recuerdo la clave, pero sé que al sumar la mitad del número clave más la cuarta parte del mismo, obtengo el año de mi nacimiento, 1986.

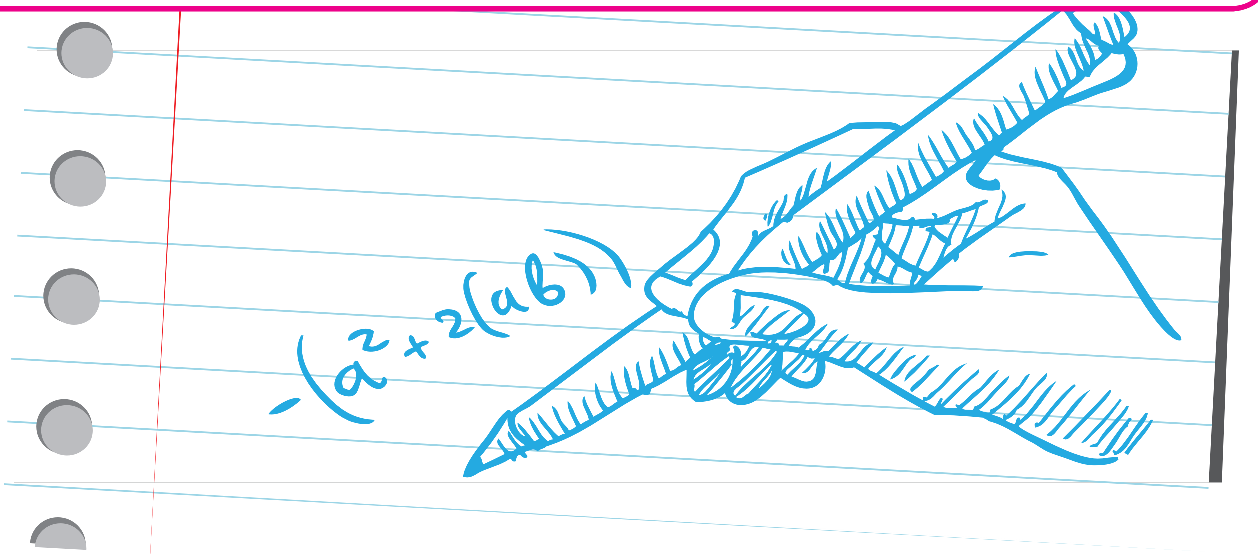


Ayude a Luis a encontrar la clave

3)

Piense un número natural, súmele 7, multiplique por 2, reste 4, divida en dos, reste el número que pensó... Su resultado es 5

¿Cómo pudo determinar el resultado?



Guía de trabajo Nº 3

SISTEMAS DE ECUACIONES

Contenido

- Sistemas de ecuaciones para resolver problemas reales provenientes del ámbito científico, cotidiano o del mundo del trabajo.

SISTEMAS DE ECUACIONES Y PROBLEMAS

No todas las situaciones cotidianas simples se pueden plantear y resolver utilizando solo una ecuación lineal, en ocasiones hay más de una incógnita y se necesita más de una ecuación.

Ejemplo:

Un electricista y su ayudante son contratados para resolver un pequeño desperfecto. Después de resolverlo, cobran $ 20.000. Al repartirse el dinero, la diferencia entre el electricista y su ayudante es de $ 8.000, **¿cuánto dinero recibe cada uno?**

En este caso es claro que hay dos incógnitas, x: cantidad de dinero recibida por el electricista e y: cantidad de dinero recibida por el ayudante.

Al releer el enunciado del problema es posible establecer 2 relaciones entre las incógnitas:

i. Han cobrado $20.000, esto es: $x + y = 20.000$

ii. La diferencia entre lo que han recibido es $8.000, esto es: $x - y = 8.000$

Las ecuaciones anteriores conforman un sistema de 2 ecuaciones y dos incógnitas que se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} x + y = 20.000 \\ x - y = 8.000 \end{array}$$

RESOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES

Para resolver sistemas de ecuaciones existen variados métodos, entre los más usuales están la reducción, la sustitución y la igualación.

Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones
- **Reducción**
- **Sustitución**
- **Igualación**

MÉTODO DE REDUCCIÓN

Este método consiste en reducir el sistema de dos ecuaciones, a una sola ecuación, en la cual haya una sola incógnita realizando operaciones algebraicas y luego sumando o restando ambas ecuaciones como se muestra en los ejemplos siguientes.

Ejemplos:

1) Resolveremos el sistema de la situación del electricista y su ayudante:

$$x + y = 20.000$$
$$x - y = 8.000 \quad +$$

Al observar el sistema, vemos que el término en y en ambas ecuaciones difiere solo en el signo, por lo que para eliminarlo, basta que sumemos las ecuaciones reduciéndose el sistema a una ecuación lineal.

$$2x + 0 = 28.000$$
$$2x = 28.000$$
$$x = 14.000$$

$$x + y = 20.000$$
$$14.000 + y = 20.000$$
$$y = 20.000 - 14.000$$
$$y = 6.000$$

El valor de $x = 14.000$, ya calculado se reemplaza en una de las dos ecuaciones del sistema, lo que hace que la ecuación de dos variables, se convierta en una ecuación lineal simple, que al resolverse entrega el valor de $y = 6.000$.

Respuesta: El electricista recibe $ 14.000 y su ayudante $ 6.000

2) resolver el siguiente sistema:

$$\begin{array}{r|} x + 3y = 14 \\ 3x + 2y = 21 \end{array}$$

Cuando los coeficientes son distintos en ambas ecuaciones, se procede igualando los coeficientes de la variable que se desea eliminar.

$$\begin{array}{r|l} x + 3y = 14 & / \cdot 3 \\ 3x + 2y = 21 & / \cdot (-1) \end{array}$$

Igualaremos los coeficientes de x, multiplicando por 3 la ecuación 1 y por-1 la ecuación 2 , para poder sumar y eliminar el término en x.

Por lo que el sistema se transforma en:

$$\begin{array}{r|l} 3x + 9y = 42 & \\ -3x - 2y = -21 & + \end{array}$$

Eliminamos x, sumando las ecuaciones.

$$7y = 21$$

$$y = \frac{21}{7}$$

$$y = 3$$

$$x + 3y = 14$$
$$x + 3 \cdot 3 = 14$$
$$x + 9 = 14$$
$$x = 14 - 9$$
$$x = 5$$

Sustituimos $y = 3$ en cualquiera de las ecuaciones iniciales para obtener el valor de x.

Respuesta: $x = 5$ e $y = 3$

Actividad en el cuaderno

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método de reducción.

a) $\begin{array}{r|} x + y = 15 \\ x - y = 5 \end{array}$

b) $\begin{array}{r|} 3x + 2y = 12 \\ 5x - 3y = -1 \end{array}$

c) $\begin{array}{r|} x + y = 9 \\ 2x - y = 6 \end{array}$

d) $\begin{array}{r|} 6y - 3x = 10 \\ 4x - 3y = -6 \end{array}$

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

El método de sustitución consiste en tomar una de las ecuaciones del sistema y en ella despejar una incógnita, en términos de la otra, luego reemplazar esa incógnita en la otra ecuación. El sistema original de dos ecuaciones se convierte en solo una ecuación lineal, la que se resuelve. El valor determinado se reemplaza en la ecuación con la que se inició el trabajo.

Ejemplo:

Resolveremos el siguiente sistema de ecuaciones mediante sustitución: $\begin{array}{r} x + y = 9 \\ 2x + 3y = 22 \end{array}$

$x + y = 9$
$x = 9 - y$ ← Despejamos x en la ecuación 1

$2x + 3y = 22$ ← Consideramos ahora la ecuación 2

$2(9 - y) + 3y = 22$ ← Introducimos la expresión de x en la ecuación 2

$18 - 2y + 3y = 22$ ← Operamos el paréntesis aplicando la propiedad distributiva

$18 + y = 22$ ← Reducimos términos semejantes

$y = 22 - 18$ ← Despejamos y

$\boxed{y = 4}$

$x = 9 - y$
$x = 9 - 4$ ← Para hallar el valor de x introducimos $y = 4$ en la expresión despejada de x

$\boxed{x = 5}$

Por lo tanto $x = 5$, e $y = 4$

Respuesta: $x = 5$, $y = 4$

Actividad en el cuaderno

1) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones. Use el método de sustitución.

a) $\begin{array}{r} x + 7y = 15 \\ 4x + 3y = 10 \end{array}$

c) $\begin{array}{r} x + 2y = 12 \\ 2x - 9y = 11 \end{array}$

b) $\begin{array}{r} x + y = 6 \\ 5x + 3y = 26 \end{array}$

d) $\begin{array}{r} 3x - y = 1 \\ 5x - 3y = -5 \end{array}$

MÉTODO DE IGUALACIÓN

Este método consiste en elegir una incógnita del sistema y despejarla de ambas ecuaciones en términos de la otra incógnita y luego igualarlas, convirtiendo el sistema de dos ecuaciones en solo una ecuación lineal, la que se resuelve. El valor de esa incógnita se reemplaza en una de las dos ecuaciones del sistema para obtener el valor de la otra incógnita:

Ejemplo:

Resolveremos el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de igualación $\begin{array}{r} x + y = 25 \\ x + 2y = 33 \end{array}$

Despejaremos la misma incógnita en ambas ecuaciones

$x = 25 - y$ ← Despejando x en la ecuación 1

$x = 33 - 2y$ ← Despejamos x en la ecuación 2

$25 - y = 33 - 2y$ ← Igualamos las expresiones obtenidas, con lo que llegamos a una ecuación con una incógnita

$2y - y = 33 - 25$ ← Resolvemos la ecuación

$\boxed{y = 8}$

$x = 25 - y$ ← Sustituimos el valor obtenido de y en cualquiera de las dos ecuaciones en que aparecía despejada la incógnita x.

$x = 25 - 8$

$\boxed{x = 17}$

Respuesta: $x = 17$, $y = 8$

Actividad en el cuaderno

1) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones. Use el método de igualación.

a) $\begin{array}{l} x - y = 6 \\ 3x - 2y = 2 \end{array}$

b) $\begin{array}{l} 4x - 9y = 12 \\ 2x + 6y = -1 \end{array}$

c) $\begin{array}{l} x - y = 0 \\ 3x + 2y = 5 \end{array}$

d) $\begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2x + y = 8 \end{array}$

TIPS

Para resolver un sistema de ecuaciones, usted decide que método utilizar (Reducción, sustitución o igualación)

Actividad en el cuaderno

Resuelva cada situación planteada, utilizando el método de resolución de sistemas de ecuaciones que más le acomode:

1) La suma de dos números es 15 y su diferencia es 1, **¿cuáles son esos números?**

2) Si $\frac{1}{4}$ de un número se suma a $\frac{1}{3}$ de otro, el resultado es 9. Si se resta $\frac{1}{2}$ del segundo a los $\frac{5}{6}$ del primero, el resultado es 1.

¿Cuáles son estos números?

3) Si se suma 3 al numerador y 5 al denominador de una fracción, su valor resulta ser $\frac{4}{5}$
Si se resta 2 tanto al numerador como al denominador, se obtiene $\frac{5}{6}$

¿Cuál es la fracción?

4) Un hombre tiene 7 años más que su esposa. Hace 10 años tenía el doble de la edad de ella, **¿cuántos años tiene él?**

5) Un curso planea ir a la piscina como paseo de fin de año. Los precios de las entradas son de \$ 1.500 para los varones y \$ 1.000 para las damas. Si se compraron 45 entradas y el gasto total fue de \$50.000, **¿cuántos varones fueron a la piscina?**

6) Una empresa tiene 53 trabajadores repartidos en dos sucursales. De ellos, 21 son profesionales titulados. Si una tercera parte de las personas que laboran en la primera sucursal y tres séptimos de los que se encuentran en la segunda sucursal son profesionales titulados, **¿cuántos empleados tiene cada oficina?**

EVALUACIÓN

Marque la alternativa correcta:

1) Al resolver el sistema $\left.\begin{array}{l} x + y = 11 \\ x - y = 1 \end{array}\right|$ se obtiene la solución:

a) $x = 6, \quad y = 5$ **b)** $x = 5, \quad y = 6$ **c)** $x = 7, \quad y = 4$ **d)** $x = 3, \quad y = 2$

2) Al resolver el sistema $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ -x + y = 1 \end{array}\right|$ se obtiene la solución:

a) $x = 1, \quad y = 0$ **b)** $x = 0, \quad y = 1$ **c)** $x = 4, \quad y = 5$ **d)** $x = 1, \quad y = 2$

3) Al resolver el sistema $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 5 \\ 6x - y = 5 \end{array}\right|$ se obtiene la solución:

a) $x = 0, \quad y = -5$ **b)** $x = 1, \quad y = 0$ **c)** $x = 1, \quad y = 1$ **d)** $x = 2, \quad y = 0$

4) La suma de dos números es $\frac{5}{2}$ y su diferencia es 1. Los números son:

a) $\frac{7}{4}$ y $\frac{3}{4}$ **b)** 2 y $\frac{1}{2}$ **c)** 2 y 1 **d)** $\frac{5}{2}$ y $\frac{3}{2}$

5) En una empresa laboran x personas que reciben como salario $ 200.000 cada uno e y personas que reciben $ 500.000 mensuales cada uno. Si en total trabajan en la empresa 62 personas y el monto total de los salarios mensuales es de 22 millones de pesos **¿Cuántos reciben $ 500.000 y cuántos $ 200.000?**

a) 20 y 42 **b)** 30 y 32 **c)** 32 y 30 **d)** 42 y 20

6) Una guía turística ganó $ 435.750 por 50 horas de trabajo en dos turnos; uno en el norte por el que recibe $7.500 por hora y otro en el sur en el cual su salario es de $9.750 por hora, **¿cuántas horas estuvo en el trabajo del norte?**

a) 15 **b)** 20 **c)** 23 **d)** 27

7) Al resolver el sistema: $\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 34 \\ 5x - 9y = 41 \end{array}\right|$ el valor de $(x-y)$ es:

a) 1 **b)** 7 **c)** 9 **d)** 10

BIBLIOGRAFÍA

1) Decreto Supremo de Educación Nº 211 de 2009 que reemplaza el Decreto Nº 131 de 2003 sobre nivelación de estudios de adultos. MINEDUC.
2) Decreto Supremo de Educación Nº 257 de 2009 que deroga Decreto Supremo de Educación Nº 239 de 2004 sobre el marco curricular de la educación de adultos.
3) Peterson, John A. y cols. (1969). Teoría de la Aritmética. Ciudad de México, México: Editorial Limusa-Wiley.
4) Zill, D. y Dewar, J. (1996) Álgebra y Trigonometría. McGraw-Hill. Ciudad de México, México: Editora Prentice Hall.
5) Swokowski, E. y Cole, J. (2002). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. 12º Edición. Ciudad de México, México: Editorial Cengage.
6) De Oteyza, E, Hernández, C. y Lam, E. (1996). Álgebra. Ciudad de México, México: Editorial Prentice Hall.
7) Campos, X y Cruz, X. (2003). Álgebra. Santiago, Chile: Editorial Arrayán.

Sitios web:

1) http://www.math2me.com/playlist/algebra
2) http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Algebraico_Lenguaje.html
3) http://www.profesorenlinea.cl/matematica/AlgebraProductosnotables.htm
4) http://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/index.html
5) http://www.sectormatematica.cl/educmedia.htm

Ministerio de
Educación

Gobierno de Chile